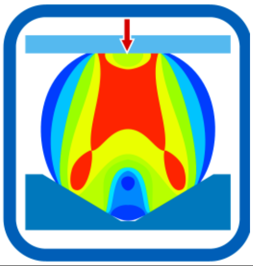

РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.6 + 621.73

Алюшин Ю. А.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

В традиционной механике твердого тела [1, 2] предполагается, что аргументами основных функций, описывающих движение, являются текущие координаты частиц (переменные Эйлера). Это, в частности, относится к напряжениям $\sigma_{ij}(x_i, t)$ в условиях равновесия

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \tag{1}$$

компонентам векторов перемещения $u_i(x_i, t)$ и скорости $v_i(x_i, t)$ при определении деформации ε_{ij} и скорости деформации s_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = 0{,}5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i), \; s_{ij} = 0{,}5(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i). \tag{2}$$

Использование переменных Эйлера мотивируют хорошо развитой теорией поля и простотой соотношений, в том числе уравнений связи между компонентами тензоров σ_{ij}, ε_{ij}, s_{ij} в виде пропорциональности средних напряжений $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ и деформаций $\varepsilon = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})/3$

$$\sigma = 3K\varepsilon, \tag{3}$$

пропорциональности девиаторов напряжений и деформации (теория упругости, G – модуль сдвига) [3]

$$\sigma_{ij} - \sigma = 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon) \tag{4}$$

или скоростей деформации (теория пластического течения) [4]

$$\sigma_{ij} - \sigma = \lambda(s_{ij} - s). \tag{5}$$

Однако физические закономерности должны формулироваться не для точек пространства, а для материальных частиц, “…с физической точки зрения переменные Лагранжа кажутся особенно удобными для описания движения сплошной среды” [2, стр. 235].

Уравнения движения в любой форме должны нести всю информацию о внешних воздействиях и внутренних изменениях, происходящих с частицами в процессе движения, так как в механике рассматриваются только явления, отражающиеся на движении и, следовательно, на уравнениях

$$f(\alpha_p, x_i, t) = 0, \tag{6}$$

которые определяют зависимость между текущими $x_i \in (x, y, z)$ и начальными $\alpha_p \in (\alpha \equiv x_0, \beta \equiv y_0, \gamma \equiv z_0)$ координатами при изменении времени t.

Цель работы – показать, что при описании движения в форме Лагранжа

$$x_i = x_i(\alpha_p, t). \tag{7}$$

эквивалентная (1) – (5) система базовых уравнений имеет более простой и удобный для решения практических задач вид, особенно для учета истории деформирования и использования принципа суперпозиции при описании сложных процессов [5–6].

Задача любого исследования – выявление объективных закономерностей, характеризующих влияние внешних воздействий на состояние механической системы. Но так как система отсчета наблюдателя всегда субъективна, связанные с ней начальные $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ и текущие $x_i \in (x, y, z)$ координаты также субъективны. В объективные закономерности могут входить лишь производные от функций (7) по времени $x_{i,t}(\alpha_p, t) \equiv \partial x_i / \partial t$ и пространственным переменным $x_{i,p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p$. С учетом основного постулата механики, в соответствии с которым поведение частиц зависит только от их положения и скоростей [1, 2], для прогнозирования развития системы могут быть также привлечены вторые смешанные производные $x_{i,tp} \equiv \partial^2 x_i /(\partial t \partial \alpha_p) \equiv \partial x_{i,t} / \partial \alpha_p$ (скорости деформации) и вторые производные по пространственным переменным $x_{i,pq} \equiv \partial^2 x_i /(\partial \alpha_p \partial \alpha_q)$, которые характеризуют изменение деформированного состояния в соседних частицах рассматриваемого объема.

В самом общем случае без каких-либо ограничений на свойства сплошной среды система (7) имеет 13 независимых локальных кинематических инвариантов [7]. Именно они определяют состояние системы и могут быть использованы для прогнозирования её поведения при внешних воздействиях.

Первые и вторые производные от уравнений (7) по времени («субстанциональные» производные) определяют компоненты векторов скорости $x_{i,t} = v_i$ и ускорения частиц $x_{i,tt} = v_{i,t} = w_i$. С учетом вектора перемещения с компонентами $u_i(\alpha_p, t) = x_i - (x_i)_{t=0} = x_i - \alpha_i$ получаем три инварианта – модули векторов перемещения $\vec{u}(\alpha_p, t)$, скорости $\vec{v}(\alpha_p, t)$ и ускорения $\vec{w}(\alpha_p, t)$:

$$\xi_1 = \sqrt{u^2}\,, \qquad \xi_2 = \sqrt{v^2}\,, \qquad \xi_3 = \sqrt{w^2}\,. \tag{8}$$

Инвариантом также является путь *s*, равный интегралу по времени от модуля скорости

$$\xi_4 = s = \int_0^t |v|\, dt\,. \tag{9}$$

Компоненты несимметричного тензора второго ранга, образуемого производными от переменных Эйлера по переменным Лагранжа

$$x_{i,p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p\,, \tag{10}$$

определяют поворот и деформацию частицы с тремя инвариантами [7]. Кубический инвариант ξ_7 совпадает с якобианом преобразования (7)

$$\xi_7 = R = |x_{i,p}| = \delta V / \delta V_0 \tag{11}$$

и равен отношению объемов бесконечно малой частицы в текущем δV и исходном δV_0 состояниях. Квадратичный инвариант равен сумме квадратов элементов тензора (10)

$$\xi_6 = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2 + y_\alpha^2 + y_\beta^2 + y_\gamma^2 + z_\alpha^2 + z_\beta^2 + z_\gamma^2 = x_{i,p} x_{i,p}\,. \tag{12}$$

В правой части уравнения использовано правило суммирования по повторяющемуся в одночлене индексу [1, 2]. Каждая сумма квадратов производных с одинаковым нижним индексом в уравнении (12) равна квадрату отношений длин рёбер бесконечно малого параллелепипеда в текущем и исходном состояниях, которые в исходном состоянии были ориентированы вдоль соответствующих направлений, например, вдоль оси *x* [6, 7]

$$e_\alpha^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = (\delta l / \delta l_0)_\alpha^2\,. \tag{13}$$

Деформацию частицы характеризуют среднее значение

$$e=(e_\alpha+e_\beta+e_\gamma)/3 \tag{14}$$

и среднеквадратическое отклонение относительных длин рёбер (13) от их среднего значения e

$$\Gamma^2=(e_\alpha-e)^2+(e_\beta-e)^2+(e_\gamma-e)^2=(e_p-e)(e_p-e). \tag{15}$$

Деформацию и поворот частицы характеризует линейный инвариант

$$\xi_5=x_\alpha+y_\beta+z_\gamma. \tag{16}$$

Инварианты $\xi_1-\xi_7$ всегда положительны, в исходном состоянии принимают значения $\xi_1=\xi_4=\xi_3=\xi_4=0$, $\xi_5=\xi_6=3$, $\xi_7=1$. С точки зрения основного тензор (10) можно рассматривать как обобщенные координаты, их скорости образуют несимметричный тензор («обобщенные скорости»)

$$x_{i,tp}\equiv\partial x_{i,t}/\partial\alpha_p, \tag{17}$$

который также имеет три инварианта: линейный, квадратичный и кубический

$$\xi_8=x_{t\alpha}+y_{t\beta}+z_{t\gamma},\qquad \xi_9=x_{t\alpha}^2+x_{t\beta}^2+x_{t\gamma}^2+y_{t\alpha}^2+y_{t\beta}^2+y_{t\gamma}^2+z_{t\alpha}^2+z_{t\beta}^2+z_{t\gamma}^2,\qquad \xi_{10}=|x_{i,tp}|. \tag{18}$$

Дополнительно 3 инварианта могут быть получены, по аналогии с (9), интегрированием по времени модулей инвариантов ξ_8, ξ_9, ξ_{10}. В отличие от инвариантов $\xi_5-\xi_7$, которые в процессе деформации могут увеличиваться или уменьшаться, значения

$$\xi_{11}=\int_0^t\sqrt{(x_{t\alpha}+y_{t\beta}+z_{t\gamma})^2}\,dt,\ \xi_{12}=\int_0^t\left(x_{t\alpha}^2+x_{t\beta}^2+x_{t\gamma}^2+y_{t\alpha}^2+\ldots+z_{t\alpha}^2+z_{t\beta}^2+z_{t\gamma}^2\right)^{1/2}dt,$$

$$\xi_{13}=\int_0^t|x_{i,tp}|^{1/3}dt \tag{19}$$

только возрастают на протяжении всего процесса деформации и позволяют учесть историю деформирования, аналогично критерию Одквиста [7, 8].

Энергию обратимой деформации характеризует инвариант [6, 9]

$$\xi_6=\Gamma_e^2=x_{i,p}x_{i,p}=e_pe_p=3e^2+\Gamma^2. \tag{20}$$

При деформации в главных осях он совпадает с квадратом отношения длин диагоналей параллелепипеда в текущем и исходном состояниях [7].

Из 13 локальных инвариантов ξ_i только 12 следует считать независимыми, так как они должны быть связаны обобщённым законом движения, определяющим реакции системы на внешние воздействия. Естественно предположить, что аргументами объективного закона должны быть все инварианты. Иначе говоря, чтобы сравнивать состояния и предсказывать реакцию системы на внешние воздействия, инварианты $\xi_1-\xi_{13}$ следует привести к одному обобщенному скаляру

$$э=э(\xi_i). \tag{21}$$

Принимая во внимание определение энергии по Аристотелю [10] («обобщенная мера различных видов движения») функцию (21) следует рассматривать как объёмную плотность энергии и для бесконечно малой частицы с объёмом δV_0 энергия составит $\delta E(\xi_i)=э(\xi_i)\delta V_0$. В первом приближении обобщенный скаляр (21) можно представить в виде суммы $э=\sum э_i(\xi_i)$, в которой каждое из слагаемых $э_i(\xi_i)$ равно произведению соответствующего инварианта ξ_i и скалярного множителя k_i, обеспечивающего равенство размерностей всех слагаемых

$$э_i=k_i\xi_i \qquad \text{или} \qquad \delta E=\sum\delta E_i(\xi_i)=\sum э_i\delta V_0=\sum k_i\xi_i\delta V_0. \tag{22}$$

Независимость пространства переменных Лагранжа в уравнениях (7) от времени позволяет использовать два независимых дифференциальных оператора для времени (d) и пространства (δ). Первый характеризует изменение любого свойства, связанного с движением, для фиксированной частицы за бесконечно малый промежуток времени *dt*, например координаты $dx(\alpha_p,t)=x_t(\alpha_p,t)dt$. Второй определяет бесконечно малые приращения в пространстве, в том числе приращения свойств, связанных с движением, для смежных частиц, лагранжевы координаты которых в исходном состоянии отличались на бесконечно малые величины $\delta\alpha_p \in (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$. Например, приращение абсциссы смежных частиц составляет $\delta x = x_\alpha\delta\alpha + x_\beta\delta\beta + x_\gamma\delta\gamma$ (нижние индексы соответствуют дифференцированию по указанным в индексах переменным $x_\alpha \equiv \partial x/\partial\alpha$). Для приращения аналогичных свойств во времени необходимо использовать одновременно два оператора, например, изменение во времени абсциссы смежных частиц определяет правая часть уравнения

$$d\delta x = \delta dx = (x_{t\alpha}\delta\alpha + x_{t\beta}\delta\beta + x_{t\gamma}\delta\gamma)dt\,.$$

Независимость двух операторов позволяет менять порядок их записи без изменения конечного результата.

Скалярные коэффициенты k_i позволяют перейти от кинематических параметров к энергетическим. Учитывая фундаментальный смысл понятия (22), можно утверждать, что коэффициенты k_i должны характеризовать либо физические свойства материала, либо свойства среды, в которой происходит движение. Например, кинетическую энергию бесконечно малой частицы определяет квадрат скорости (инвариант ξ_2),

$$\delta E_k/\delta V_0 = k_2\xi_2^2 = \delta m v^2/(2\delta V_0) = \rho_0 v^2/2 \quad \text{или} \quad k_2 = \rho_0/2\,, \tag{23}$$

где δm – масса частицы, ρ_0 – плотность материала. Изменение потенциальной энергии при движении в гравитационном поле Земли зависит от вертикального перемещения частицы (инвариант ξ_1, ось z направлена от центра Земли)

$$\Delta\delta E_p/\delta V_0 = k_1\Delta\xi_1 = \rho_0 g\Delta z \qquad \text{или} \qquad k_1 = \rho_0 g\,, \tag{24}$$

где g – ускорение свободного падения, множитель $k_1 = \rho_0 g$ учитывает свойства материала и среды, в которой происходит движение.

Коэффициенты при интегральных по времени инвариантах, в том числе для пути (9), должны характеризовать диссипативные процессы, например, связанные с трением на внешних поверхностях движущихся частиц и на поверхностях разрыва кинематически возможных полей скоростей [4, 11].

Переход от инвариантов уравнений движения к объёмной плотности энергии позволяет получить практически все используемые в классической механике твердого тела уравнения, включая определяющие уравнения теории упругости и пластичности, а также дифференциальные уравнения движения, из закона сохранения энергии в виде приращений

$$d\delta E = \delta V_0(d\sum k_i\xi_i) = 0\,. \tag{25}$$

Уравнение (25) может быть справедливым только для изолированных систем, которые не обмениваются с окружающей средой ни веществом, ни энергией [1, 2]. Для иных влияние отбрасываемой внешней среды должно быть заменено энергией внешних воздействий $d\delta E_e$, эквивалентным по влиянию на движение элементов выделяемой подсистемы. Тогда закон сохранения энергии (25) для бесконечно малой частицы примет вид

$$d\delta E = \delta V_0(d\sum k_i\xi_i) - \delta dE_e = 0\,. \tag{26}$$

Для учета энергетических потоков со стороны окружающих частиц воспользуемся общепринятой методикой [3, 4], использующей скалярное произведение векторов сил $\delta\vec{P}$ и скоростей $\vec{v}$ точек их приложения

$$d\delta E_e = \sum(\delta\vec{P}\cdot\vec{v})dt\,. \tag{27}$$

Суммирование в правой части должно быть проведено по всем ограничивающим рассматриваемую бесконечно малую частицу поверхностям. Предполагая все функции дифференцируемыми и заданными в переменных Лагранжа, с точностью до бесконечно малых 1-го порядка, получим

$$d\delta E_e / dt = \left(\delta P_{\alpha_p x_i} + \delta P_{\alpha_p x_i,\alpha_p}\delta\alpha_p\right)\left(x_{i,t} + x_{i,t\alpha_p}\delta\alpha_p\right) - \left(\delta P_{\alpha x_i} + \delta P_{\alpha x_i} + \delta P_{\alpha x_i}\right)x_{i,t}. \qquad (28)$$

Отношения бесконечно малых сил δP_{pi} к исходным площадям граней

$$\tau_{\alpha i} = \delta P_{\alpha i}/(\delta\beta\delta\gamma); \quad \tau_{\beta i} = \delta P_{\beta i}/(\delta\alpha\delta\gamma); \quad \tau_{\gamma i} = \delta P_{\gamma i}/(\delta\alpha\delta\beta) \qquad (29)$$

назовем напряжениями Лагранжа. Первый индекс $p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ указывает направление нормали к рассматриваемой площадке в исходном состоянии, второй $i \in (x, y, z)$ – направление проекции силы. Напряжения τ_{pi} подобны напряжениям Пиола-Кирхгофа [2, 3], но отличаются от них не только предполагаемой областью изменения аргументов (пространство переменных Лагранжа), но и неоднозначным выбором начала отсчета шкалы напряжений, которое может быть смещено относительно общепринятой [6, 9].

С обозначениями (25) вместо (24) получим

$$d\delta E_e = \sum(\delta\vec{P}\cdot\vec{v})dt = \delta V_0 dt\left(\tau_{pi}x_{i,tp} + x_{i,t}\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p\right). \qquad (30)$$

Напряжения τ_{pi} образуют несимметричный тензор. С учетом мощности внешних взаимодействий

$$\omega = d\delta E_e/(\delta V_0 dt) = \tau_{pi}x_{i,tp} + x_{i,t}\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p \qquad (31)$$

закон сохранения энергии (22) можно записать в форме энергетического баланса

$$d\delta E = \delta V_0(k_1\xi_{1,t} + k_2\xi_{2,t} + k_3\xi_{3,t} + ... + k_{13}\xi_{13,t} - \omega)dt = 0.$$

Используя соотношения (24) для потенциальной и (23) для кинетической энергии (ось *z* направлена вертикально вверх),

$$d\delta E_1 = \rho_0 g z_t \delta V_0 dt, \qquad d\delta E_2 = \rho_0(x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt})\delta V_0 dt,$$

уравнение для баланса принимает вид

$$d\delta E = \delta V_0[\rho_0 g z_t + \rho_0(x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt}) + k_3\xi_{3,t} + ... + k_{13}\xi_{13,t} - \omega]dt = 0 \qquad (32)$$

или

$$\begin{aligned} & k_3\xi_{3,t} + k_4\xi_{4,t} + k_5\xi_{5,t} + k_6\xi_{6,t} + ... + k_{13}\xi_{13,t} \\ &= \tau_{\alpha x}x_{t\alpha} + \tau_{\alpha y}y_{t\alpha} + \tau_{\alpha z}z_{t\alpha} + \tau_{\beta x}x_{t\beta} + \tau_{\beta y}y_{t\beta} + \tau_{\beta z}z_{t\beta} + \\ &+ \tau_{\gamma x}x_{t\gamma} + \tau_{\gamma y}y_{t\gamma} + \tau_{\gamma z}z_{t\gamma} + x_t\left(\partial\tau_{\alpha x}/\partial\alpha + \partial\tau_{\beta x}/\partial\beta + \partial\tau_{\gamma x}/\partial\gamma - \rho_0 x_{tt}\right) + \\ &+ x_t\left(\partial\tau_{\alpha x}/\partial\alpha + \partial\tau_{\beta x}/\partial\beta + \partial\tau_{\gamma x}/\partial\gamma - \rho_0 x_{tt}\right) + z_t\left(\partial\tau_{\alpha z}/\partial\alpha + \partial\tau_{\beta z}/\partial\beta + \partial\tau_{\gamma z}/\partial\gamma - \rho_0 z_{tt}\right). \end{aligned}$$

Энергия не должна зависеть от субъективного фактора – выбора системы отсчета скоростей, поэтому сумма последних трех слагаемых должна обращаться в 0 (эквивалент принципа наименьшего принуждения). Более жесткое условие равенства нулю каждой из скобок соответствует дифференциальным уравнениям движения или равновесия

$$\partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p = \rho_0 x_{i,tt} \qquad \text{или} \qquad \partial\tau_{pi}/\partial\alpha_p = 0. \qquad (33)$$

Последняя система соответствует условию минимума функционала

$$W = \int_{V_0}\tau_{pi}x_{i,tp}\delta V = \int_V \omega(x_{i,t\alpha}, x_{i,t\beta}, x_{i,t\gamma})\delta\alpha\delta\beta\delta\gamma.$$

Следовательно, действительное поле скоростей обеспечивает минимум интегральной мощности деформации *W*.

Пренебрегая процессами диссипации (без учета инвариантов, связанных с интегрированием по времени), вместо уравнения (32) получим

$$d\delta E_1 + d\delta E_2 + d\delta E_3 + d\delta E_5 + d\delta E_6 + d\delta E_7 = \omega\delta V_0 dt.$$

Учитывая, что приращение инварианта ξ_3 содержит производные третьего порядка по времени от текущих координат, которые не могут входить в обобщённый закон движения, в дальнейшем ограничимся, с учетом дифференциальных уравнений (33), соотношением

$$\tau_{pi}x_{i,tp} = k_5(x_{t\alpha}+y_{t\beta}+z_{t\gamma})+$$
$$+2k_6(x_\alpha x_{t\alpha}+x_\beta x_{t\beta}+x_\gamma x_{t\gamma}+y_\alpha y_{t\alpha}+y_\beta y_{t\beta}+y_\gamma y_{t\gamma}+z_\alpha z_{t\alpha}+z_\beta z_{t\beta}+z_\gamma z_{t\gamma})+$$
$$+k_7(\tilde{x}_\alpha x_{t\alpha}+\tilde{x}_\beta x_{t\beta}+\tilde{x}_\gamma x_{t\gamma}+\tilde{y}_\alpha y_{t\alpha}+\tilde{y}_\beta y_{t\beta}+\tilde{y}_\gamma y_{t\gamma}+\tilde{z}_\alpha z_{t\alpha}+\tilde{z}_\beta z_{t\beta}+\tilde{z}_\gamma z_{t\gamma}). \tag{34}$$

Инварианты (18) не включены в энергетический баланс обратимой деформации (34), так как их множители содержат производные типа $x_{i,ttp}$, которые не входят в выражение (31) для мощности внешних воздействий.

Напряжения τ_{pi} являются важнейшими характеристиками процессов деформации, именно они, в соответствии с уравнениями (33), определяют ускорения частиц.

Зависимости напряжений от свойств материала и деформированного состояния изучают в специальных разделах и формулируют в виде определяющих уравнений или законов, например, закона упругого изменения объёма (3) или закона Гука (4). Как правило, эти уравнения определяют из экспериментальных исследований, но, как отмечено в работе [2], для этого могут быть использованы и общие термодинамические принципы. В частности, соотношения между физическими свойствами k_i, компонентами тензоров напряжений τ_{pi} и деформаций $x_{i,p}$ следуют непосредственно из закона сохранения энергии (34), который удобнее записать в виде

$$k_5(x_{t\alpha}+y_{t\beta}+z_{t\gamma})+$$
$$+2k_6(x_\alpha x_{t\alpha}+x_\beta x_{t\beta}+x_\gamma x_{t\gamma}+y_\alpha y_{t\alpha}+y_\beta y_{t\beta}+y_\gamma y_{t\gamma}+z_\alpha z_{t\alpha}+z_\beta z_{t\beta}+z_\gamma z_{t\gamma})+$$
$$+k_7(\tilde{x}_\alpha x_{t\alpha}+\tilde{x}_\beta x_{t\beta}+\tilde{x}_\gamma x_{t\gamma}+\tilde{y}_\alpha y_{t\alpha}+\tilde{y}_\beta y_{t\beta}+\tilde{y}_\gamma y_{t\gamma}+\tilde{z}_\alpha z_{t\alpha}+\tilde{z}_\beta z_{t\beta}+\tilde{z}_\gamma z_{t\gamma})=$$
$$=\tau_{\alpha x}x_{t\alpha}+\tau_{\alpha y}y_{t\alpha}+\tau_{\alpha z}z_{t\alpha}+\tau_{\beta x}x_{t\beta}+\tau_{\beta y}y_{t\beta}+\tau_{\beta z}z_{t\beta}++\tau_{\gamma x}x_{t\gamma}+\tau_{\gamma y}y_{t\gamma}+\tau_{\gamma z}z_{t\gamma}.$$

Это равенство следует рассматривать как энергетическое тождество, которое должно выполняться при любых видах движения, независимо от свойств материала или среды, в которой происходит движение. Приравнивая коэффициенты при одинаковых компонентах тензора (17), получаем соотношения между компонентами напряжений (29), деформаций (10) и константами k_i, характеризующими физические свойства материала,

$$\tau_{pi} = k_5\delta_{pi} + 2k_6 x_{i,p} + k_7\tilde{x}_{i,p}. \tag{35}$$

В соотношениях (35) и далее $\tilde{x}_{i,p}$ – алгебраические дополнения элементов $x_{i,p}$ матрицы (10), единичный тензор δ_{pi} принимает значения $\delta_{pi}=1$ при соответствии индексов «*p*» и «*i*», т. е. $\delta_{pi}=1$ для $\tau_{\alpha x}, \tau_{\beta y}, \tau_{\gamma z}$ и $\delta_{pi}=0$ для всех остальных напряжений.

Как следует из уравнений (35), напряжения Лагранжа τ_{pi} зависят от 3 физических характеристик материала. В исходном состоянии компоненты тензора определяют только физические свойства

$$\tau_{\alpha x}=\tau_{\beta y}=\tau_{\gamma z}=k_5+2k_6+k_7 \quad , \quad \tau_{\beta x}=\tau_{\gamma x}=\tau_{\alpha y}=\tau_{\gamma y}=\tau_{\alpha z}=\tau_{\beta z}=0.$$

Субъективные факторы, в том числе выбор начального значения напряжений $\tau_{\alpha x}, \tau_{\beta y}, \tau_{\gamma z}$, влияют на значения коэффициентов $k_5 - k_7$ и напряжения τ_{pi}.

Для выявления зависимости между напряжениями Лагранжа τ_{pi} и Коши σ_{ij} рассмотрим энергетический баланс в начальный момент времени, когда вместо (32) можно записать

$$d\delta E/(\delta V dt) = \sigma_{ij}x_{j,ti} + x_{j,t}(\partial\sigma_{ij}/\partial x_j - \rho x_{i,tt}). \tag{36}$$

Выражения в скобках соответствуют дифференциальным уравнениям движения $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \rho\cdot x_{i,tt}$. Переходя от производных по переменным Эйлера $\partial x_{i,t}/\partial x_j \equiv x_{i,tj}$ к производным по переменным Лагранжа $\partial x_{i,t} / \partial \alpha_p \equiv x_{i,tp}$ с помощью общих соотношений, вытекающих из уравнений движения (7), $\partial f / \partial x_i = (\partial f / \partial \alpha_p)\tilde{x}_{i,p} / R$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых множителях $x_{i,tp}$ в правых частях уравнений (30) и (36), получим систему линейных уравнений $\tau_{pi} = \sigma_{ji}\tilde{x}_{j,p}$, которые формально совпадают с известными статическими условиями [1, 4] на контуре и по существу определяют связи между напряжениями Лагранжа и Коши, справедливые для любого момента

$$\sigma_{ji} = \tau_{pi} x_{j,p} / R. \quad (37)$$

Равенства (37) известны как зависимости между напряжениями Коши и Пиола – Кирхгофа [1], их можно трактовать как следствие условия инвариантности энергии по отношению к выбору начала отсчета времени.

С учетом $\xi_5 - \xi_7$ для напряжений Коши σ_{ji} окончательно получаем

$$\sigma_{ji} = \frac{1}{R}\left(\tau_{\alpha i} x_{j,\alpha} + \tau_{\beta i} x_{j,\beta} + \tau_{\gamma i} x_{j,\gamma}\right) = \frac{1}{R}\left[k_5 x_{j,\alpha} + 2k_6(x_{i,\alpha}x_{j,\alpha} + x_{i,\beta}x_{j,\beta} + x_{i,\gamma}x_{j,\gamma}) + k_7(x_{j,\alpha}\tilde{x}_{i,\alpha} + x_{j,\beta}\tilde{x}_{i,\beta} + x_{j,\gamma}\tilde{x}_{i,\gamma})\right], \quad (38)$$

например,

$$\sigma_{xx} = \left(\tau_{\alpha x} x_\alpha + \tau_{\beta x} x_\beta + \tau_{\gamma x} x_\gamma\right)/ R = \left[k_5 x_\alpha + 2k_6(x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2) + k_7(x_\alpha \tilde{x}_\alpha + x_\beta \tilde{x}_\beta + x_\gamma \tilde{x}_\gamma)\right]/ R,$$

$$\sigma_{xy} = \left(\tau_{\alpha y} x_\alpha + \tau_{\beta y} x_\beta + \tau_{\gamma y} x_\gamma\right)/ R = \left[k_5 x_\beta + 2k_6(x_\alpha y_\alpha + x_\beta y_\beta + x_\gamma y_\gamma) + k_7(x_\alpha \tilde{y}_\alpha + x_\beta \tilde{y}_\beta + x_\gamma \tilde{y}_\gamma)\right]/ R$$

Множители коэффициента k_7 в уравнениях (34) могут принимать только 2 значения $x_{j,\alpha}\tilde{x}_{i,\alpha} + x_{j,\beta}\tilde{x}_{i,\beta} + x_{j,\gamma}\tilde{x}_{i,\gamma} = R$ при $i = j$ и $x_{j,\alpha}\tilde{x}_{i,\alpha} + x_{j,\beta}\tilde{x}_{i,\beta} + x_{j,\gamma}\tilde{x}_{i,\gamma} = 0$ при $i \neq j$. Фактически коэффициент k_7 входит только в нормальные напряжения

$$\sigma_{ii} = \left(\tau_{\alpha i} x_{i,\alpha} + \tau_{\beta i} x_{i,\beta} + \tau_{\gamma i} x_{i,\gamma}\right)/ R = k_7 + \left[k_5 x_{i,\alpha} + 2k_6(x_{i,\alpha}x_{i,\alpha} + x_{i,\beta}x_{i,\beta} + x_{i,\gamma}x_{i,\gamma})\right]/ R.$$

и по существу определяет выбор шкалы нормальных и средних напряжений. Для обычной шкалы следует принять $k_7 = -(k_5 + 2k_6)$. Инвариантной характеристикой состояния можно считать среднее напряжение Коши σ

$$3\sigma R = k_5\xi_5 + 2k_6\xi_6 + 3k_7\xi_7. \quad (39)$$

Слагаемые напряжений Лагранжа с коэффициентами k_5 и k_7 не оказывают влияния на дифференциальные уравнения движения или равновесия, так как

$$\frac{\partial \tilde{x}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{x}_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial \tilde{x}_\gamma}{\partial \gamma} = (y_\beta z_\gamma - y_\gamma z_\beta)_\alpha + (y_\gamma z_\alpha - y_\alpha z_\gamma)_\beta + (y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha)_\gamma = 0$$

и при $k_5 = const$ вместо (33) получаем [9]

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha_p^2} = \frac{\rho_0}{2k_6} x_{i,tt} \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha_p^2} = 0.$$

Уравнения движения сводятся к трём уравнениям Пуассона или Лапласа, в каждое из которых входит только одна неизвестная функция.

При $k_5 = 0$ или $\partial x_j / \partial \alpha_i = \partial x_i / \partial \alpha_j$ тензор (38) становится симметричным, как в классической механике, а уравнение (35) принимает вид

$$\tau_{pi} = 2k_6(x_{i,p} - \tilde{x}_{i,p}).$$

Из соотношений (32)–(39) следует, что напряжения (35) предпочтительнее: они энергетически обоснованы и связаны простыми уравнениями с имеющими четкий геометрический смысл характеристиками деформированного состояния (10)–(16). Примеры применения новых уравнений для решения задач приведены в работах [11, 12].

ВЫВОДЫ

При описании движения в форме Лагранжа возможна замена традиционных понятий напряжений (1), деформаций и скоростей деформаций (2) новыми мерами (10), (17) и (29) с переходом к эквивалентной системе уравнений равновесия (или движения) (33), закону упругого изменения объема (39) и определяющим уравнениям (35) с новыми, согласованными с законом сохранения энергии, физическими свойствами материалов. Переход к новым мерам способствует снижению математических трудностей при анализе различных процессов деформации. Уточнение варьируемых параметров, принимаемых при описании уравнений движения, возможно из условия минимума интегральной мощности деформации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов.– М. : Наука, ГРФМЛ, 1979.–744 с.

2. Прагер В. Введение в механику сплошных сред / В. Прагнер. – М.: Иностранная литература, 1963. –312 с.

3. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. = Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 408 с.

4. Теория пластических деформаций металлов / Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров [и др.]; Под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с., ил.

5. Алюшин Ю.А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – №3. – С. 13–19.

6. Алюшин Ю.А. Механика твёрдого тела в переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин. –. М.: Машиностроение, 2012. – 192 с.

7. Алюшин Ю.А. Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин. – М.: Машиностроение, 1997. – 136с.

8. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

9. Алюшин Ю.А. Энергетическая шкала средних напряжений и свойства металлов в области обратимых и необратимых деформаций / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2010. – №3. – С. 95–104.

10. Богомолов А.Н. Механика в истории человечества / А. Н. Богомолов. – М.: Наука, 1978. – 150 с.

11. Методика аналитического определения траекторий частиц при штамповке / Ю. А. Алюшин, Г. П. Жигулев, А. М. Широких, М. М. Скрипаленко // Известия вузов. Черная металлургия. – 2010. – № 5. – С. 44–50.

12. Алюшин Ю.А. Осесимметричная деформация в переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Вестник Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт" Серия Машиностроение. – Киев, 2013. –№67. – С. 192–198.

REFERENCES

1. Rabotnov Ju. N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela / Ju. N. Rabotnov.– M. : Nauka, GRFML, 1979.–744 s.

2. Prager V. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred / V. Pragner. – M.: Inostrannaja literatura, 1963. –312 s.

3. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. = Hill R. Matematicheskaja teorija plastichnosti. – M.: Gostehizdat, 1956. – 408 s.

4. Teorija plasticheskih deformacij metallov / E.P. Unksov, U. Dzhonson, V.L. Kolmogorov [i dr.]; Pod red. E.P. Unksova, A.G. Ovchinnikova. – M.: Mashinostroenie, 1983. – 598 s., il.

5. Aljushin Ju.A. Princip superpozicii dvizhenij v prostranstve peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. – 2001. – №3. – S. 13–19.

6. Aljushin Ju.A. Mehanika tvjordogo tela v peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin. –. M.: Mashino-stroenie, 2012. – 192 s.

7. Aljushin Ju.A. Mehanika processov deformacii v prostranstve peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin. – M.: Mashinostroenie, 1997. – 136s.

8. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti / L. M. Kachanov. – M.: Nauka, 1969. – 420 s.

9. Aljushin Ju.A. Jenergeticheskaja shkala srednih naprjazhenij i svojstva metallov v oblasti obrati-myh i neobratimyh deformacij / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadjozhnosti mashin. – 2010. – №3. – S. 95–104.

10. Bogomolov A.N. Mehanika v istorii chelovechestva / A. N. Bogomolov. – M.: Nauka, 1978. – 150 s.

11. Metodika analiticheskogo opredelenija traektorij chastic pri shtampovke / Ju. A. Aljushin, G. P. Zhigulev, A. M. Shirokih, M. M. Skripalenko // Izvestija vuzov. Chernaja metallurgija. – 2010. – № 5. – S. 44–50.

12. Aljushin Ju.A. Osesimmetrichnaja deformacija v peremennyh Lagranzha / Ju. A. Aljushin // Vestnik Nacional'nogo tehnicheskogo universiteta Ukrainy "Kievskij politehnicheskij institut" Serija Mashino-stroenie. – Kiev, 2013. – №67. – S. 192–198.

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. НИТУ МИСиС

НИТУ МИСиС – Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, г. Москва, РФ.

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 20.03.2016 г.